



Физический факультет
Московского
государственного университета
имени М.В.Ломоносова

Классическая и квантовая генерация высших гармоник в нелинейной электродинамике

студент: Илья Копчинский^{1,2}
научный руководитель: Пётр Сатунин²

¹ МГУ им. М.В.Ломоносова, кафедра физики частиц и космологии

² Институт Ядерных Исследований РАН

30 мая 2022



Целями данной работы являются:

- Описание проявления вакуумной нелинейности КЭД в резонаторе в классическом¹ и квантовом формализмах
- Поиск условий для резонансного усиления высших гармоник
- Объяснение классического предсказания на квантовом уровне

Достигнутые результаты:

- Автоматизация² метода разделения переменных в классическом формализме
- Подбор конфигурации резонатора-параллелепипеда для генерации высшей гармоники
- Получение двух согласующихся оценок для числа сигнальных фотонов идентично различными путями

¹Phys.Rev.A 105 (2022) 1, 013508 (arXiv: 2110.04490)

²<https://github.com/Ilia-Ko/Supplemental-Materials/tree/main/Nonlinear-ED/Part-I>

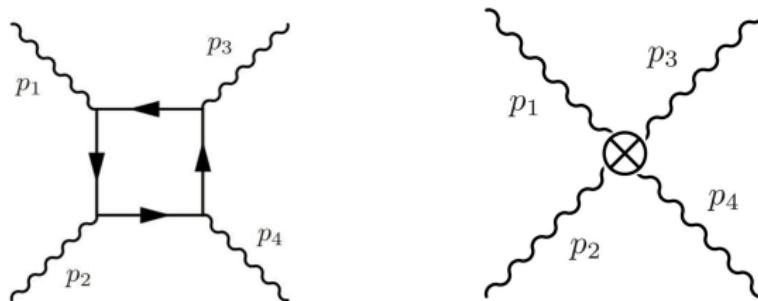


Оглавление

- Введение: нелинейная электродинамика Эйлера-Гейзенберга
- Классический подход:
 - Общий метод поиска резонансных мод
 - Одномерный резонатор
 - Одна мода накачки
 - Две моды накачки
 - Прямоугольный 3D резонатор
 - Одна мода накачки
 - Две моды накачки
 - $TM_{110} + TE_{011}$
 - Подытог
- Квантовый подход:
 - Квантование свободного поля на отрезке
 - Квантование свободного поля в параллелепипеде
 - Матричные элементы на отрезке
 - Матричный элемент для $TM_{110} + TE_{011}$
- Выводы



Взаимодействие с виртуальными электронами отынтегрировано (в пределе $p \ll m_e$)

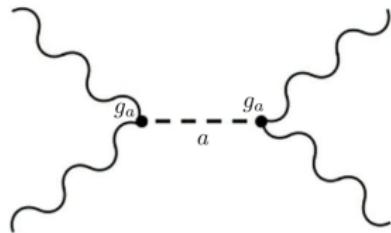
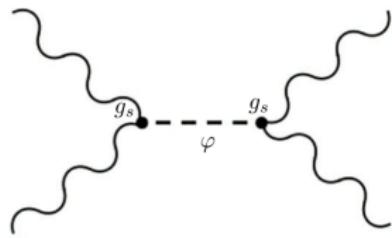


Эффективный лагранжиан Эйлера-Гейзенберга³ ($\hbar = c = 1$ + Хевисайд с.ед.)

$$\mathcal{L}_{EH} = -\frac{1}{4}\mathcal{F} + \kappa \left(\mathcal{F}^2 + \frac{7}{4}\mathcal{G}^2 \right), \quad \kappa = \frac{\alpha_e^2}{90m_e^4}.$$

$$\mathcal{F} = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2\left(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2\right), \quad \mathcal{G} = F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu} = -4(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}),$$

³H.Euler and B. Kockel (1935), W.Heisenberg and H.Euler (1936)



$$\mathcal{L}_\phi = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - \frac{m_\phi^2 \phi^2}{2} + g_s \phi \mathcal{F}$$

⇓

$$\mathcal{L}_{ED}^{EFT} \supset \frac{g_s^2}{2m_\phi^2} \mathcal{F}^2$$

$$\mathcal{L}_a = \frac{1}{2}(\partial_\mu a)^2 - \frac{m_a^2 a^2}{2} + g_a a \mathcal{G}$$

⇓

$$\mathcal{L}_{ED}^{EFT} \supset \frac{g_a^2}{2m_a^2} \mathcal{G}^2$$

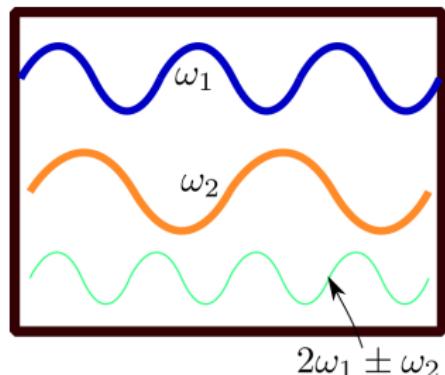
$$\mathcal{L}_{nonlinear} = \kappa (\mathcal{F}^2 + \beta \mathcal{G}^2)$$



Нелинейная теория с 4-фотонным взаимодействием: $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$ рассеяние.

Радио моды в резонаторах: возможность генерации мод комбинированных частот.⁴

- моды накачки: ω_1, ω_2
- сигнальные моды: $2\omega_{1(2)} \pm \omega_{2(1)}, 3\omega_{1(2)}$.
- резонансное усиление сигнальной моды
- $Q \sim 10^{11}$ в сверхпроводящих резонаторах



- В работе ⁴ не представлены в явном виде резонансные решения.
- Нет резонансного усиления 3-й гармоники в 1D. **K. Shibata. EPJ D (2020)**
- Цель работы — явно найти резонансные решения в 1D и 3D либо показать, что их нет. Рассмотреть генерацию в классическом и квантовом формализмах.

⁴ G. Brodin, M. Marklund, L. Stenflo. Phys. Rev. Lett. (2001)
D. Eriksson, G. Brodin, M. Marklund, L. Stenflo. Phys. Rev. A (2004)



Нелинейные уравнения Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \left[\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{M} \right]$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = [-\nabla \cdot \mathbf{P}]$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Векторы вакуумной поляризации и намагничения

$$\mathbf{P} = 16\kappa \left[\left(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 \right) \mathbf{E} + 7/2(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \right]$$

$$\mathbf{M} = 16\kappa \left[\left(\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2 \right) \mathbf{B} - 7/2(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{E} \right]$$

Модифицированные волновые уравнения

$$\square \mathbf{E} = \nabla \times \partial_t \mathbf{M} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{P}) - \partial_t^2 \mathbf{P}$$

$$\square \mathbf{B} = \nabla \times \partial_t \mathbf{P} - \nabla (\nabla \cdot \mathbf{M}) + \Delta \mathbf{M}$$



ЭМ поле: моды накачки (даны изначально) + сигнальная мода (которую ищем), $\mathbf{E} = \mathbf{E}^p + \mathbf{E}^{sig}$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}^p + \mathbf{B}^{sig}$

Иерархия параметров: $|\mathbf{E}^{sig}| \sim \kappa |\mathbf{E}^p|^3 \leq 10^{-24} |\mathbf{E}^p| \ll |\mathbf{E}^p|$

Пертурбативные волновые уравнения, линейные по \mathbf{E}^{sig} :

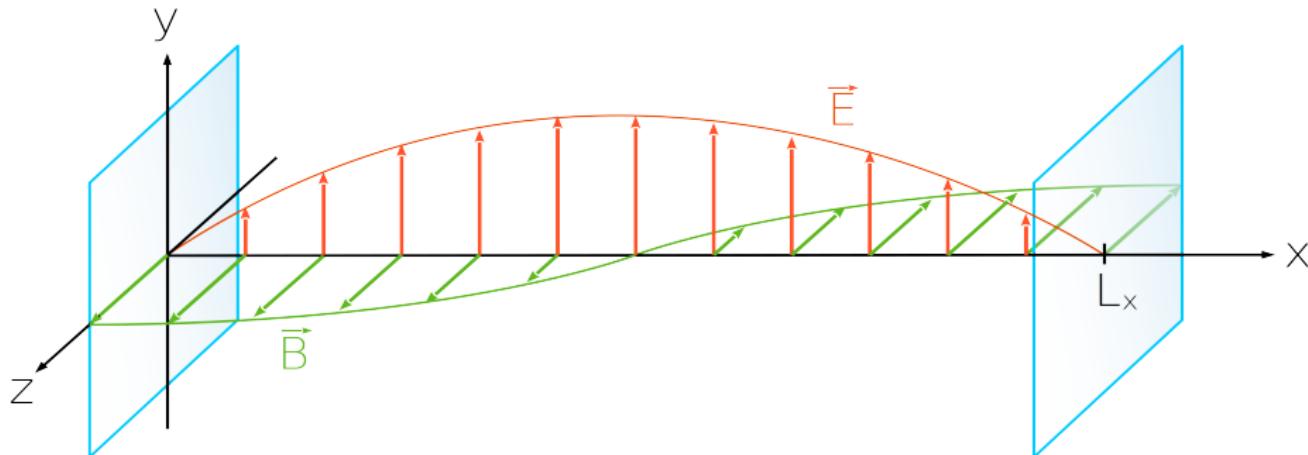
$$\begin{aligned}\square \mathbf{E}^{sig} &= \nabla \times \partial_t \mathbf{M}(\mathbf{E}^p, \mathbf{B}^p) + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{E}^p, \mathbf{B}^p)) - \partial_t^2 \mathbf{P}(\mathbf{E}^p, \mathbf{B}^p) \\ \square \mathbf{B}^{sig} &= \nabla \times \partial_t \mathbf{P}(\mathbf{E}^p, \mathbf{B}^p) - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{M}(\mathbf{E}^p, \mathbf{B}^p)) + \Delta \mathbf{M}(\mathbf{E}^p, \mathbf{B}^p)\end{aligned}$$

имеют резонансно растущие решения,

$$\square E_x = \cos(\omega_r t) \sin(\omega_r x) + \dots \rightarrow E_x^{(growing)} = \frac{t}{\omega_r} \sin(\omega_r t) \sin(\omega_r x).$$

Введём диссипацию Γ на исследуемой частоте Ω :

$$(\square + \Gamma \Omega \partial_t) E_x = \cos(\omega_r t) \sin(\omega_r x) \rightarrow E_x^{(steady)} = \frac{1}{\Gamma \omega_r} \sin(\omega_r t) \sin(\omega_r x).$$



Одномерный резонатор с идеальными стенками: $L_y, L_z \gg L_x \equiv a$

Собственные частоты: $\omega_n = k_n = \frac{\pi n}{a}, n \in \mathbb{N}$

Монохроматическое возбуждение резонатора:

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{pump}(x, t) = B_0 \sin(k_n x) \sin(\omega_n t) \mathbf{e}_y, \\ \mathbf{B}^{pump}(x, t) = B_0 \cos(k_n x) \cos(\omega_n t) \mathbf{e}_z. \end{cases}$$



Мода накачки: $E_y^{pump} = B_0 \sin(\omega_n x) \sin(\omega_n t), \quad B_z^{pump} = B_0 \cos(\omega_n x) \cos(\omega_n t)$.

Уравнения на сигнальные моды⁵:

$$(\square + \Gamma \Omega \partial_t) E_y^{sig} = 8\kappa B_0^3 \omega_n^2 \left[2 \sin(\omega_n x) \sin(\omega_n t) - 3 \sin(\omega_n x) \sin(3\omega_n t) + \sin(3\omega_n x) \sin(\omega_n t) \right],$$

$$(\square + \Gamma \Omega \partial_t) B_z^{sig} = 8\kappa B_0^3 \omega_n^2 \left[2 \cos(\omega_n x) \cos(\omega_n t) - \cos(\omega_n x) \cos(3\omega_n t) + 3 \cos(3\omega_n x) \cos(\omega_n t) \right].$$

Волновые числа в правых частях	n	$3n$
Соответствующие частоты	ω_n, ω_{3n}	ω_n

Эволюция сигнальной моды⁶:

- Основная частота ω_n усиливается резонансно
Но: бесполезна, т.к. теряется на фоне мод накачки
- Нет резонансного усиления высшей гармоники $3\omega_n$.

⁵Символьные вычисления осуществляются в СКА “wxMaxima 21.02.0”.

⁶Согласуется с K. Shibata. EPJ D (2020).



Две моды накачки с частотами: $\omega_n = \frac{\pi n}{a}$, $\omega_p = \frac{\pi p}{a}$, $n, p \in \mathbb{N}$

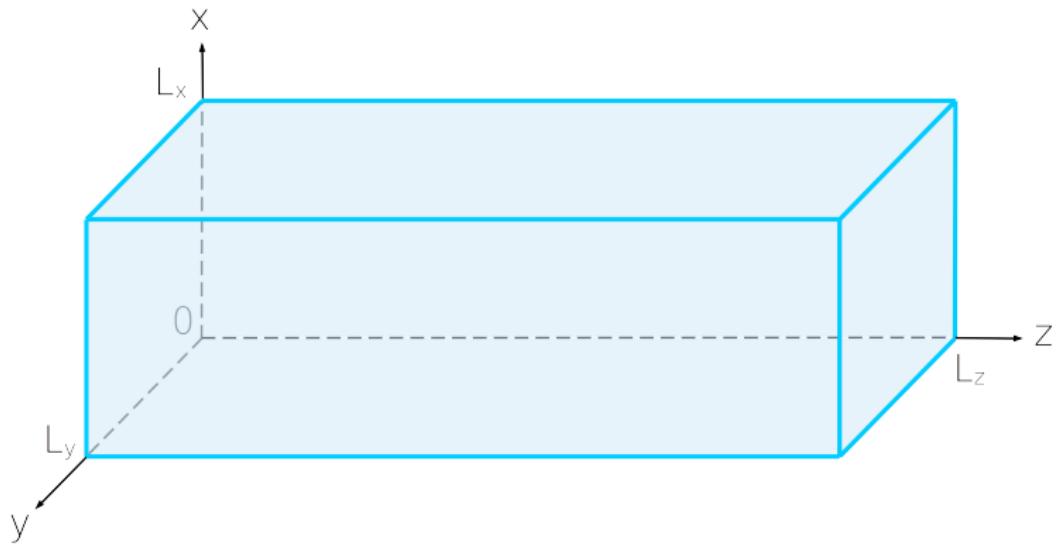
$$\begin{cases} \mathbf{E}^{pump}(x, t) = B_0 \operatorname{Re} \left\{ \mathcal{E}_n(x) e^{i\omega_n t} + \hat{\mathbf{R}}_x(\alpha) \mathcal{E}_p(x) e^{i\omega_p t} \right\}, \\ \mathbf{B}^{pump}(x, t) = B_0 \operatorname{Re} \left\{ i\mathcal{M}_n(x) e^{i\omega_n t} + \hat{\mathbf{R}}_x(\alpha) i\mathcal{M}_p(x) e^{i\omega_p t} \right\}, \end{cases} \quad \hat{\mathbf{R}}_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Спектры правых частей сигнальных уравнений:

Индексы	n	$3n$	$2n - p$	$2n + p$
Спектры	ω_n , $\omega_{2p \pm n}$, ω_{3n}	ω_n	ω_p , ω_{2n+p}	ω_p , ω_{2n-p}

$$+(n \leftrightarrow p)$$

- Резонансно усиливаются только гармоники ω_n и ω_p
- Нет слагаемых $\cos((2\omega_n \pm \omega_p)t) \cos((2\omega_n \pm \omega_p)x)$ в правых частях
- Гармоники смешанных частот $\omega_{2n \pm p}$ не резонируют!



Собственные функции параллелепипеда с идеальными стенками:

$$\mathcal{E}_{npq}^{TM}(\mathbf{r}), \quad \mathcal{M}_{npq}^{TM}(\mathbf{r}), \quad n, p \in \mathbb{N}, \quad q \in \mathbb{N}_0, \quad \mathbf{k}_{npq} = \left(\frac{\pi n}{a}, \frac{\pi p}{b}, \frac{\pi q}{c} \right),$$

$$\mathcal{E}_{npq}^{TE}(\mathbf{r}), \quad \mathcal{M}_{npq}^{TE}(\mathbf{r}), \quad n, p \in \mathbb{N}_0, \quad q \in \mathbb{N}, \quad \omega_{npq} = |\mathbf{k}_{npq}| = \pi \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} + \frac{q^2}{c^2}}.$$



Возбуждение монохроматическим полем частоты ω_{npq} .

Неоднородности (правые части) сигнальных уравнений:

$$(\square + \Gamma\Omega\partial_t) \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{F}^{el}(t, \mathbf{r}), \quad (\square + \Gamma\Omega\partial_t) \mathbf{B}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{F}^{mg}(t, \mathbf{r}).$$

Спектры неоднородностей сигнальных уравнений:

Моды	n, p, q	$3n, p, q$	$3n, 3p, q$	$(n \leftrightarrow p \leftrightarrow q)$	$3n, 3p, 3q$
Спектры $\mathbf{F}^{el}, \mathbf{F}^{mg}$			$\omega_{npq}, 3\omega_{npq}$		ω_{npq}

- Основная частота ω_{npq} резонансно усиливается
- Утроенная гармоника $3\omega_{npq}$ **не** генерируется

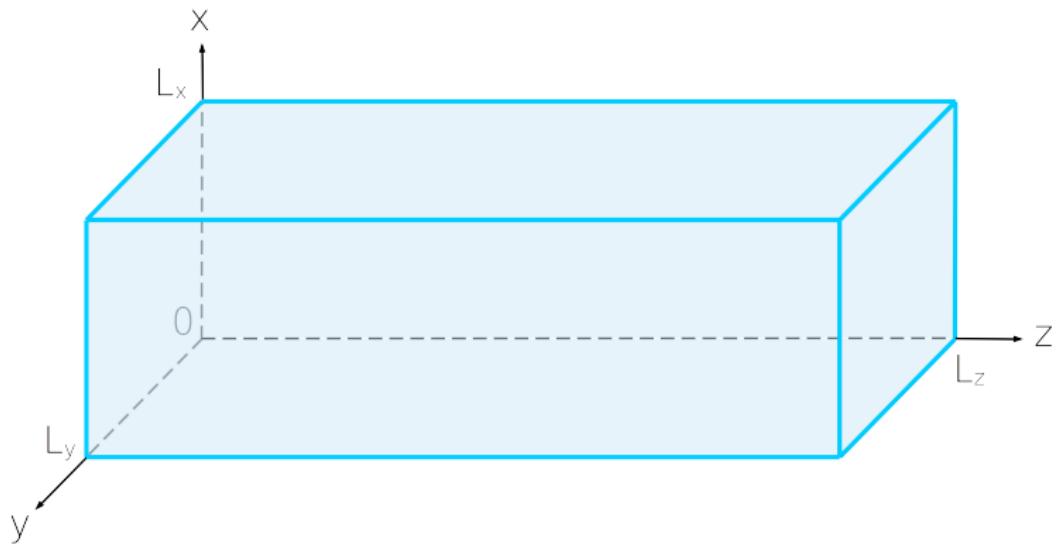


Два независимых сектора в спектрах правых частей сигнальных ур-й

Индексы	n_1	$3n_1$	n_1	113	$3n_1$
	p_1	p_1	$3p_1$...	$3p_1$
	q_1	q_1	q_1	331	$3q_1$
F_z^{el} на ТМ	$\omega_1, 3\omega_1, 2\omega_2 + \omega_1, 2\omega_2 - \omega_1$			$\omega_1, 3\omega_1$	
	$\omega_1, (3\omega_1)$			ω_1	
F_z^{mg} на ТЕ				—	

Индексы	$2n_2 \pm n_1$	n_1	n_1	...	$2n_2 \pm n_1$		
	p_1	$2p_2 \pm p_1$	p_1	...			
	q_1	q_1	$2q_2 \pm q_1$	$2p_2 \pm p_1$			
F_z^{el} на ТМ	$\omega_1, 2\omega_2 + \omega_1, 2\omega_2 - \omega_1$						
	$\omega_1, 2\omega_2 + \omega_1, 2\omega_2 - \omega_1$						
F_z^{mg} на ТЕ				$2q_2 \pm q_1$			

- Некоторые амплитуды зануляются, когда $\mathbf{k}_1 \parallel \mathbf{k}_2$
- $2\omega_2 + \omega_1$ отсутствует в секторе с утроенными индексами



Моды накачки: $TM_{110} + TE_{011}$

$$\mathbf{E}^{pump}(t, \mathbf{r}) = B_0 \operatorname{Re} \left\{ \mathcal{E}_{110}^{TM}(\mathbf{r}) e^{i\omega_{110}t} + \mathcal{E}_{011}^{TE}(\mathbf{r}) e^{i\omega_{011}t} \right\},$$

$$\mathbf{B}^{pump}(t, \mathbf{r}) = B_0 \operatorname{Re} \left\{ i\mathcal{M}_{110}^{TM}(\mathbf{r}) e^{i\omega_{110}t} + i\mathcal{M}_{011}^{TE}(\mathbf{r}) e^{i\omega_{011}t} \right\}.$$



Спектры неоднородностей сигнальных уравнений:

ТМ-моды	110	130	310	330
Спектры	$\omega_{110}, 3\omega_{110}, 2\omega_{011} \pm \omega_{110}$		$\omega_{110}, 3\omega_{110}$	ω_{110}

ТМ-моды	112	132	211	231
Спектры	$\omega_{110}, 2\omega_{011} \pm \omega_{110}$		$\omega_{011}, 2\omega_{110} \pm \omega_{011}$	

ТЕ-моды	011	031	013	033
Спектры	$\omega_{011}, 3\omega_{011}, 2\omega_{110} \pm \omega_{011}$		$\omega_{011}, 3\omega_{011}$	ω_{011}

ТЕ-моды	112	132	211	231
Спектры	$\omega_{110}, 2\omega_{011} \pm \omega_{110}$		$\omega_{011}, 2\omega_{110} \pm \omega_{011}$	

- ω_{110} (ω_{011}) резонируют, $3\omega_{110}$ ($3\omega_{011}$) не резонируют
- Условие попадания на спектр $2\omega_{011} - \omega_{110} = \omega_{130}$ разрешимо
- **Нет** резонанса комбинационной частоты $2\omega_{011} + \omega_{110}$ ($2\omega_{110} + \omega_{011}$)



$$2\omega_{011} - \omega_{110} = \omega_{130}$$

$$\omega_{npq} = \pi \sqrt{\frac{n^2}{L_x^2} + \frac{p^2}{L_y^2} + \frac{q^2}{L_z^2}} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{L_z}{L_x}\right)^2 \left(\frac{L_z}{L_y}\right)^2 + \left(\frac{L_z}{L_x}\right)^2 + 3 \left(\frac{L_z}{L_y}\right)^2 = 1$$

$$+ \text{фиксируем } L_x = L_y \Rightarrow L_x : L_y : L_z = 1 : 1 : r, \quad r = \left(\sqrt{5} - 2\right)^{\frac{1}{2}} \approx 0.486$$

Восстановим явный вид сгенерированной гармоники:

$$\begin{cases} \mathbf{E}^{sig}(t, \mathbf{r}) = B_0^{sig} \operatorname{Re} \left\{ \boldsymbol{\mathcal{E}}_{130}^{TM}(\mathbf{r}) e^{i(\omega_{130} t + \pi)} \right\}, \\ \mathbf{B}^{sig}(t, \mathbf{r}) = B_0^{sig} \operatorname{Re} \left\{ i \boldsymbol{\mathcal{M}}_{130}^{TM}(\mathbf{r}) e^{i(\omega_{130} t + \pi)} \right\}, \end{cases} \quad B_0^{sig} = G_0 \frac{\pi^2 \kappa B_0^3 Q}{(\omega_{130} L_z)^2}$$

Амплитуда $B_0^{sig} = G_0 \frac{\pi^2 \kappa B_0^3 Q}{(\omega_{130} L_z)^2} \approx 10^{-16} \text{ Тл}$ (только Эйлер-Гейзенберг)

при параметрах $B_0 = 0.1 \text{ Тл}$, $Q = 10^{10}$, $L_z = 20 \text{ см}$, $\omega_{130} = 2.4 \text{ ГГц}$.



Обобщение теории Эйлера-Гейзенберга $7/4 \rightarrow \beta$:

$$\mathcal{L}_{eff} = -\frac{1}{4}\mathcal{F} + \kappa \left(\mathcal{F}^2 + \beta \mathcal{G}^2 \right)$$

Геометрический коэффициент G_0 :

$$G_0(r, \beta) = \frac{4 \left(4 + r\sqrt{2(1+r^2)} + r^2 \right) - 4\beta r \left(\sqrt{2(1+r^2)^3} + (3+r^2)r \right)}{1+r^2}.$$

Для $\beta = \frac{7}{4}$ и $r = (\sqrt{5} - 2)^{\frac{1}{2}}$ $\Rightarrow G_0 \approx 6.51$.

Может зануляться при некотором β или особой геометрии $L_x : L_y : L_z$.



- Третья гармоника ($3\omega_1$) **не** усиливается в 1D- и 3D-резонаторах
- Комбинационная гармоника ($2\omega_1 + \omega_2$) **не** усиливается в 1D- и 3D-резонаторах
- Мода ($2\omega_1 - \omega_2$) **может** генерироваться в 3D-резонаторе.
Конструктивно показано для $\omega_{130} = 2\omega_{011} - \omega_{110}$



- Третья гармоника ($3\omega_1$) **не** усиливается в 1D- и 3D-резонаторах
- Комбинационная гармоника ($2\omega_1 + \omega_2$) **не** усиливается в 1D- и 3D-резонаторах
- Мода ($2\omega_1 - \omega_2$) **может** генерироваться в 3D-резонаторе.
Конструктивно показано для $\omega_{130} = 2\omega_{011} - \omega_{110}$

Нерешённые вопросы:

- Почему не генерируются третья гармоника и $2\omega_1 + \omega_2$?
Третья гармоника резонансно усиливается в теории $\lambda\phi^4$!
- Как понимать генерацию $2\omega_1 - \omega_2$ на квантовом уровне? По закону сохр. энергии, процесс $3 \rightarrow 1$ рождает конечный фотон $2\omega_1 + \omega_2$.



$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{EH}$$

$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ \Rightarrow квантование свободного поля

$\mathcal{L}_{EH} = 4\kappa[(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)^2 + 4\beta(\mathbf{B} \cdot \mathbf{E})^2]$ \Rightarrow 1-й порядок ТВ



Квантовое описание

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{EH}$$

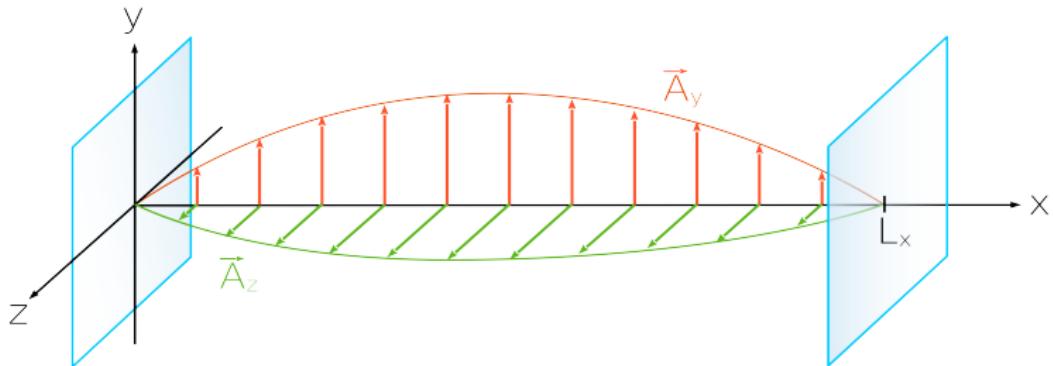
$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ \Rightarrow квантование свободного поля

$\mathcal{L}_{EH} = 4\kappa[(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)^2 + 4\beta(\mathbf{B} \cdot \mathbf{E})^2]$ \Rightarrow 1-й порядок ТВ

Переход $|i\rangle \rightarrow |f\rangle$, матрица $S = T \exp\left(i \int \mathcal{L}_{EH}(x) dx\right) = 1 + iT$

$$T_{fi} = 2\pi\delta(\omega_f - \omega_i) \cdot \mathcal{M}_{fi}, \quad 2\pi\delta(\omega_f - \omega_i) = \frac{Q}{\omega_{sig}}$$

Среднее равновесное число фотонов $N_{sig}^{quant} = \int |T_{fi}|^2 d\Phi = \frac{Q^2 |\mathcal{M}_{fi}|^2}{\omega_{sig}^2}$



Границные условия:

$$\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\tau} \Big|_{x=0, L_x} = 0, \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} \Big|_{x=0, L_x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\tau} \Big|_{x=0, L_x} = 0$$

Разложение по модам:

$$A_i(t, x) = A_i^+(t, x) + A_i^-(t, x), \quad A_i^\pm(t, x) = \sqrt{\frac{2}{V}} \sum_{n=1}^{\infty} a_{i,n}^\pm \sin(k_n x) \frac{e^{\pm i\omega_n t}}{\sqrt{2\omega_n}}, \quad k_n = \frac{\pi n}{L_x}$$

Квантование: $[a_{i,n}^-, a_{j,n'}^+] = \delta_{ij} \delta_{nn'}$



Раскладываем $\mathbf{A}(t, \mathbf{r})$ по ТЕ- и ТМ-модам $\mathcal{A}_{npq}^{\lambda}(\mathbf{r})$, $\lambda \in \{\text{TE, TM}\}$

$$\mathbf{A}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{A}^+(t, \mathbf{r}) + \mathbf{A}^-(t, \mathbf{r}), \quad \mathbf{A}^{\pm}(t, \mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\lambda, npq} a_{npq}^{\lambda \pm} \mathcal{A}_{npq}^{\lambda}(\mathbf{r}) \frac{e^{\pm i\omega_{npq} t}}{\sqrt{2\omega_{npq}}}$$

Квантование: $[a_{npq}^{\lambda-}, a_{n'p'q'}^{\lambda'+}] = \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{nn'} \delta_{pp'} \delta_{qq'}$



На отрезке:

$$\left\langle 1_{3n}^{(l)} \left| \mathcal{M} \right| 2_n^{(i)}, 1_n^{(j)} \right\rangle = \overbrace{\left\langle : \mathbf{B}^4 : \right\rangle + \left\langle : \mathbf{E}^4 : \right\rangle}^{=0} - 2 \left\langle : \mathbf{B}^2 \mathbf{E}^2 : \right\rangle + \overbrace{4\beta \left\langle : (\mathbf{B} \mathbf{E})^2 : \right\rangle}^{=0} = 0$$

см. $\mathcal{L}_{EH} = 4\kappa \left[(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)^2 + 4\beta (\mathbf{B} \cdot \mathbf{E})^2 \right]$

Процесс $n, n, n \rightarrow 3n$ запрещён.



На отрезке:

$$\left\langle 1_{3n}^{(l)} \left| \mathcal{M} \right| 2_n^{(i)}, 1_n^{(j)} \right\rangle = \overbrace{\left\langle : \mathbf{B}^4 : \right\rangle + \left\langle : \mathbf{E}^4 : \right\rangle}^{=0} - 2 \left\langle : \mathbf{B}^2 \mathbf{E}^2 : \right\rangle + \overbrace{4\beta \left\langle : (\mathbf{B} \mathbf{E})^2 : \right\rangle}^{=0} = 0$$

см. $\mathcal{L}_{EH} = 4\kappa \left[(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)^2 + 4\beta (\mathbf{B} \cdot \mathbf{E})^2 \right]$

Процесс $n, n, n \rightarrow 3n$ запрещён.

$$\left\langle 1_{2n+p}^{(s)} \left| \mathcal{M} \right| 1_n^{(i)}, 1_n^{(j)}, 1_p^{(l)} \right\rangle = \overbrace{\left\langle : \mathbf{B}^4 : \right\rangle + \left\langle : \mathbf{E}^4 : \right\rangle}^{=0} - 2 \left\langle : \mathbf{B}^2 \mathbf{E}^2 : \right\rangle + \overbrace{4\beta \left\langle : (\mathbf{B} \mathbf{E})^2 : \right\rangle}^{=0}$$

Процесс $n, n, p \rightarrow 2n + p$ тоже запрещён.



В параллелепипеде:

запрещён процесс для фотонов $2\omega_{011} + \omega_{110} \rightarrow \omega_{130}$

$$\left\langle \begin{array}{c} 1_{130}^{TM} \\ \xi_{011}^{TE}, \eta_{110}^{TM} \end{array} \middle| \mathcal{M} \middle| \begin{array}{c} \xi_{011}^{TE}, \eta_{110}^{TM} \end{array} \right\rangle = \frac{-4\kappa\xi^2\eta^*}{V} \times \\ \times \frac{k_{1z}^2\omega_{130}\omega_{110} + k_{1z}^2(2\omega_{110}^2 + k_{1y}^2) - \beta k_{1y}^2(\omega_{011} + \omega_{110})^2}{\omega_{011}\sqrt{\omega_{130}\omega_{110}}}$$

Идёт когерентная генерация сигнальной моды ТМ130 со средним равновесным числом фотонов: $N_{sig}^{quant} = g_1\kappa^2 Q^2 B_0^6 L_z^4$

Классический результат: $N_{sig}^{class} = g_0\kappa^2 Q^2 B_0^6 L_z^4$,

$$g_0 \equiv g_1 \simeq \frac{10}{3}$$

Точное совпадение классического и квантового предсказаний:

$$N_{sig}^{class} = N_{sig}^{quant} = N_{sig} \simeq 55 \text{ фотонов}$$



- Высшие гармоники не генерировались из-за специфичной векторной структуры инвариантов электромагнитного поля $\mathcal{F} = 2(B^2 - E^2)$, $\mathcal{G} = -4(B \cdot E)$
- На уровне одиночных фотонов процессы $3 \rightarrow 1$ запрещены



- Высшие гармоники не генерировались из-за специфичной векторной структуры инвариантов электромагнитного поля $\mathcal{F} = 2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)$, $\mathcal{G} = -4(\mathbf{B} \cdot \mathbf{E})$
- На уровне одиночных фотонов процессы $3 \rightarrow 1$ запрещены
- Идёт генерация высших гармоник на фоне когерентных мод накачки
- Классический и квантовый подходы дают идентичное предсказание

$$N_{sig} \simeq \frac{10}{3} \kappa^2 Q^2 B_0^6 L_z^4 \simeq 55 \text{ фотонов,}$$

и возможности квантового описания шире.



- Высшие гармоники не генерировались из-за специфичной векторной структуры инвариантов электромагнитного поля $\mathcal{F} = 2(B^2 - E^2)$, $\mathcal{G} = -4(B \cdot E)$
- На уровне одиночных фотонов процессы $3 \rightarrow 1$ запрещены
- Идёт генерация высших гармоник на фоне когерентных мод накачки
- Классический и квантовый подходы дают идентичное предсказание

$$N_{sig} \simeq \frac{10}{3} \kappa^2 Q^2 B_0^6 L_z^4 \simeq 55 \text{ фотонов,}$$

и возможности квантового описания шире.

Спасибо за внимание!





Настройка резонатора: $2\pi\delta(\omega_{130} - 2\omega_{011} + \omega_{110}) = 2\pi\delta(0)$

$2\pi\delta(0) = \tau_\gamma = \frac{1}{\Gamma} = \frac{Q}{\omega}$ — время затухания фотона частоты ω

$$w_{fi} = |\mathbf{T}_{fi}|^2 = |2\pi\delta(0) \mathcal{M}_{fi}|^2 = \frac{Q^2}{\omega^2} |\mathcal{M}_{fi}|^2$$

Фазовый объём: $d\Phi = V \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} = V \frac{\Delta n}{L_x} \frac{\Delta p}{L_y} \frac{\Delta q}{L_z} = 1$ (разложение в ряд Фурье)

Среднее равновесное количество фотонов: $N_{sig} = \frac{Q^2}{\omega_{130}^2} |\mathcal{M}_{fi}|^2 1$



Нормальные спаривания лестничных операторов с полями **E** и **B**.

На отрезке:

$$\underline{a_{i,n}^-} E_j(t, x) = \delta_{ij} i \sqrt{\frac{\omega_n}{L_x}} \sin(k_n x) e^{i\omega_n t}, \quad \underline{E_i} a_{j,n}^+ = \left(\underline{a_{j,n}^-} E_i \right)^*$$

$$\underline{a_{z,n}^-} B_y(t, x) = -\sqrt{\frac{\omega_n}{L_x}} \cos(k_n x) e^{i\omega_n t}, \quad \underline{B_y} a_{z,n}^+ = \left(\underline{a_{z,n}^-} B_y \right)^*$$

В параллелепипеде:

$$\underline{a_{npq}^{\lambda-}} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = i \sqrt{\frac{\omega_{npq}}{2}} \mathcal{A}_{npq}^{\lambda}(\mathbf{r}) e^{i\omega_{npq} t}, \quad \underline{\mathbf{E}(\mathbf{x})} a_{npq}^{\lambda+} = \left(\underline{a_{npq}^{\lambda-}} \mathbf{E}(\mathbf{x}) \right)^*$$

$$\underline{a_{npq}^{\lambda-}} \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\omega_{npq}}} \nabla \times \mathcal{A}_{npq}^{\lambda}(\mathbf{r}) e^{i\omega_{npq} t}, \quad \underline{\mathbf{B}(\mathbf{x})} a_{npq}^{\lambda+} = \left(\underline{a_{npq}^{\lambda-}} \mathbf{B}(\mathbf{x}) \right)^*$$



Установившаяся амплитуда \mathbf{E}^{sig} сигнальной моды в резонаторе D с границей S – решение начально-краевой задачи:

$$\begin{cases} (\square + \Gamma \partial_t) \mathbf{E}^{sig}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}), & \mathbf{r} \in D, t > 0, \\ \mathbf{E}^{sig}(0, \mathbf{r}) = 0, & \mathbf{r} \in D, \\ \mathbf{n} \times \mathbf{E}^{sig}(\mathbf{r}) = 0, & \mathbf{r} \in S. \end{cases}$$

$$\mathbf{E}^{sig}(t, \mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{\infty} E_k^{sig}(t) \cdot \mathcal{E}_k(\mathbf{r}).$$

$$\ddot{E}_n^{sig}(t) + \Gamma \dot{E}_n^{sig}(t) + \omega_n^2 E_n^{sig}(t) = F_n(t), \quad F_n(t) \equiv \frac{\int_D \mathbf{F}(t, \mathbf{r}) \cdot \mathcal{E}_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r}}{\|\mathcal{E}_n\|^2}.$$

Критерий резонанса для сигнальной моды с частотой ω_{sig}

- 1 ω_{sig} принадлежит к спектру резонатора ($\exists m \in \mathbb{N} : \omega_{sig} = \omega_m$),
- 2 Временной спектр $F_m(t)$ содержит ω_{sig} .



- 1 Находим моды резонатора данной формы $\left\{ \mathcal{E}_k(\mathbf{r}) \leftrightarrow \omega_k \right\}_{k=1}^{\infty}$
- 2 Задаём конфигурацию мод накачки $\mathbf{E}^{pump}(t, \mathbf{r})$ and $\mathbf{B}^{pump}(t, \mathbf{r})$
- 3 Вычисляем правую часть волновых уравнений $\mathbf{F}^{el}(t, \mathbf{r})$ and $\mathbf{F}^{mg}(t, \mathbf{r})$
- 4 Определяем, какие ω_{sig} могли бы появиться из-за кубического смешивания мод накачки:
 $\omega_1, \omega_2 \rightarrow \omega_{sig} \in \{\omega_1, \omega_2, 3\omega_1, 3\omega_2, 2\omega_1 \pm \omega_2, 2\omega_2 \pm \omega_1\}$
- 5 Проверяем оба условия критерия резонанса для каждой ω_{sig} :
 - Находим t такой, чтобы $\omega_{sig} = \omega_t$
 - Проверяем, что гармоника ω_{sig} остаётся в правой части
$$\omega_{sig} \in F_m(t) = \frac{1}{\|\mathcal{E}_m\|^2} \int_D \mathbf{F}(t, \mathbf{r}) \cdot \mathcal{E}_m(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$



$$(\square + \Gamma \Omega \partial_t) \mathbf{E}^{sig}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{F}^{el}(t, \mathbf{r})$$

$$(\square + \Gamma \Omega \partial_t) \mathbf{B}^{sig}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{F}^{mg}(t, \mathbf{r})$$

TM:	npq	3n, p, q	n, 3p, q	n, p, 3q	n, 3p, 3q	3n, p, 3q	3n, 3p, q	3n, 3p, 3q
\mathbf{F}^{el}								
\mathbf{F}^{mg}				$\omega_{npq}, 3\omega_{npq}$				ω_{npq}

TE:	npq	3n, p, q	n, 3p, q	n, p, 3q	n, 3p, 3q	3n, p, 3q	3n, 3p, q	3n, 3p, 3q
\mathbf{F}^{el}								
\mathbf{F}^{mg}				$\omega_{npq}, 3\omega_{npq}$				ω_{npq}

Есть только резонанс основной частоты ω_{npq} .



- Моды накачки: $TM_{n_1 p_1 q_1} + TE_{n_2 p_2 q_2}$, $\omega_1 := \omega_{n_1 p_1 q_1}$, $\omega_2 := \omega_{n_2 p_2 q_2}$
- правые части сигнальных уравнений могут содержать только слагаемые:

$$h(\omega_{sig}t) \cdot h(k_{sig,xx}) \cdot h(k_{sig,yy}) \cdot h(k_{sig,zz}), \quad h(\cdot) = \sin(\cdot) \text{ или } \cos(\cdot),$$

$$\begin{aligned} \omega_{sig} \in \{ & \omega_1, \quad \omega_2, \quad 2\omega_1 \pm \omega_2, \quad 2\omega_2 \pm \omega_1, \quad 3\omega_1, \quad 3\omega_2 \}, \\ k_{sig,i} \in \{ & k_{1,i}, \quad k_{2,i}, \quad 2k_{1,i} \pm k_{2,i}, \quad 2k_{2,i} \pm k_{1,i}, \quad 3k_{1,i}, \quad 3k_{2,i} \}, \\ & i = x, y, z \end{aligned}$$

Первое условие резонанса:

$$\omega_{sig}^2 = k_{sig,x}^2 + k_{sig,y}^2 + k_{sig,z}^2$$

Поиск моды $2\omega_1 + \omega_2$. Неравенство треугольника.

$$2\omega_2 + \omega_1 = |2\mathbf{k}_2| + |\mathbf{k}_1| \geqslant |2\mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_1| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (2k_{2,i} + k_{1,i})^2}$$

- Равенство выполняется при параллельных волновых векторах $\mathbf{k}_1 \parallel \mathbf{k}_2$
- В случае не параллельных волновых векторов, неравенство треугольника требует хотя бы для одного i , чтобы $k_{sig,i} = 3 \times \max(k_{1,i}, k_{2,i})$



Полный расчёт $\int_D \mathbf{F}(t, \mathbf{r}) \cdot \mathcal{E}_n(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ слишком ресурсозатратен

Усечённая схема анализа:

- 2×3 задач на скалярные компоненты $E_i^{sig}, B_i^{sig}, i = x, y, z$
- решение задачи на $E_z^{sig}(t, \mathbf{r})$ отдельно от других компонент
- скалярное разложение по модам $E_z^{sig}(t, \mathbf{r}) = \sum_{k=1}^{\infty} E_{k,z}^{sig}(t) \mathcal{E}_{k,z}(\mathbf{r})$
- расчёт $F_{k,z}^{el}(t) = \frac{1}{\|\mathcal{E}_{k,z}\|^2} \int_D F_z^{el}(t, \mathbf{r}) \mathcal{E}_{k,z}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ заметно быстрее
- частичного решения достаточно, чтобы доказать отсутствие резонансной генерации
- если бы резонанс был, то компонента $E_z^{sig}(t, \mathbf{r})$ усиливалась бы (а мы покажем, что она не резонирует)



ТМ-моды:	110	130	310	330
$\mathbf{F}^{el}, \mathbf{F}^{mg}$	$\omega_{110}, 3\omega_{110}, 2\omega_{011} \pm \omega_{110}$		$\omega_{110}, 3\omega_{110}$	ω_{110}

ТМ-моды:	112	132	211	231
$\mathbf{F}^{el}, \mathbf{F}^{mg}$		$\omega_{110}, 2\omega_{011} \pm \omega_{110}$	$\omega_{011}, 2\omega_{110} \pm \omega_{011}$	

ТЕ-моды:	011	031	013	033
$\mathbf{F}^{el}, \mathbf{F}^{mg}$	$\omega_{011}, 3\omega_{011}, 2\omega_{110} \pm \omega_{011}$		$\omega_{011}, 3\omega_{011}$	ω_{011}

ТЕ-моды:	112	132	211	231
$\mathbf{F}^{el}, \mathbf{F}^{mg}$		$\omega_{110}, 2\omega_{011} \pm \omega_{110}$	$\omega_{011}, 2\omega_{110} \pm \omega_{011}$	

Резонирует ω_{npq} , а также можно сгенерировать ω_{130} либо ω_{031} .



$$\begin{aligned}
 \delta S &= \int \left(-\frac{1}{4} \delta f + 2\alpha f \delta f + 2\beta g \delta g \right) d^4 x = \\
 &\left(\delta f = 4F^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu, \quad \delta g = 4\tilde{F}^{\mu\nu} \partial_\mu \delta A_\nu, \quad d^4 x = dx^\mu d^3 S_\mu \right) \\
 &= \iint \left(-F^{\mu\nu} + 8\alpha f F^{\mu\nu} + 8\beta g \tilde{F}^{\mu\nu} \right) \frac{\partial(\delta A_\nu)}{\partial x^\mu} dx^\mu d^3 S_\mu = \\
 &= \int \left(-F^{\mu\nu} + 8\alpha f F^{\mu\nu} + 8\beta g \tilde{F}^{\mu\nu} \right) \delta A_\nu \Big|_{x_0^\mu}^{x_1^\mu} d^3 S_\mu - \\
 &\quad - \iint \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(-F^{\mu\nu} + 8\alpha f F^{\mu\nu} + 8\beta g \tilde{F}^{\mu\nu} \right) \delta A_\nu dx^\mu d^3 S_\mu.
 \end{aligned}$$



$$\delta S = - \int \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(-F^{\mu\nu} + 8\alpha f F^{\mu\nu} + 8\beta g \tilde{F}^{\mu\nu} \right) \delta A_\nu \, d^4x,$$

$$\forall \delta A_\nu \quad \delta S \equiv 0 \quad \Rightarrow$$

$$\partial_\mu \left(F^{\mu\nu} - 8\alpha f F^{\mu\nu} - 8\beta g \tilde{F}^{\mu\nu} \right) = 0.$$

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & +B_y \\ E_y & +B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & +B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} F_{\alpha\beta}.$$